



KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA XOSSALARI BILAN UNING XUSUSIY HOSILALARI XOSSALARI ORASIDAGI ALOQADORLIK

p.f.f.d. (PhD) I.E.Tursunov

O'zbekiston jurnalistika va ommaviy kommunikatsiyalar universiteti,

Toshkent, O'zbekiston

E-mail: i.tursunov1506@mail.ru

[ORCID-0009-0067-2448-9672](https://orcid.org/0009-0067-2448-9672)

Annotatsiya: Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning xususiy hosilalari o'rtasidagi bog'lanishlar tahlil qilingan. Funksiyaning biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uning barcha xususiy hosilalariga ega bo'lishi uchun zaruriy va ayrim hollarda yetarli shart ekanligi isbotlar asosida yoritilgan. Shuningdek, funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo'lishi uning differensiallanuvchanligini kafolatlamasligi misollar bilan ko'rsatib berilgan. Bir o'zgaruvchili va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar orasidagi farqlar ham umumlashtirilgan.

Kalit so'zlar: ko'p o'zgaruvchili funksiya, xususiy hosila, differensiallanuvchanlik, uzluksizlik, teorema, orttirma, limit, matematik analiz.

Аннотация: В данной статье проанализированы связи между функциями нескольких переменных и их частными производными. Показано, что дифференцируемость функции в некоторой точке является необходимым и в некоторых случаях достаточным условием существования всех частных производных в этой точке. Также с помощью примеров продемонстрировано, что существование частных производных не всегда гарантирует дифференцируемость функции. Обобщены различия между функциями одной переменной и функциями нескольких переменных.

Ключевые слова: функция нескольких переменных, частная производная, дифференцируемость, непрерывность, теорема, приращение, предел, математический анализ.

Annotation: This article analyzes the relationships between multivariable functions and their partial derivatives. It is demonstrated that differentiability of a function at a certain point is a necessary and in some cases sufficient condition for the existence of all partial derivatives at that point. Moreover, examples are provided to show that the existence of partial derivatives does not always guarantee differentiability. The distinctions between single-variable and multivariable functions are also generalized.

Key words: multivariable function, partial derivative, differentiability, continuity, theorem, increment, limit, mathematical analysis

Kirish.

Bir o'zgaruvchili funksiyalarda hosilaning mavjudligi uning differensiallanuvchi bo'lishi uchun ham zaruriy ham yetarli shart edi. Endi ko'p





o'zgaruvchili funksiyalarda ham bu o'rinli yoki o'rinli emasligi bilan tanishib o'tamiz.

Materiallar va usullar.

1-teorema. Agar $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning shu nuqtada barcha xususiy hosilalari $f'_{x_1}(x_0), f'_{x_2}(x_0), \dots, f'_{x_n}(x_0)$, mavjud va ular mos ravishda

$$\Delta f(x_0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

munosabatdagi $A_1, A_2, \dots, A_m$ larga teng bo'ladi:

$$f'_{x_1}(x_0) = A_1, \quad f'_{x_2}(x_0) = A_2, \quad \dots, \quad f'_{x_m}(x_0) = A_m.$$

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $\Delta f(x_0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x_1 \neq 0$. $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_m = 0$ deb olsak, u holda

$$\Delta x_1 f(x_0) = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1.$$

Bundan ko'rindiki, $f'_{x_1}(x_0) = A_1$. Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada $f'_{x_1}(x_0), f'_{x_2}(x_0), \dots, f'_{x_n}(x_0)$ xususiy hosilalarining mavjudligi va

$$f'_{x_1}(x_0) = A_1, \quad f'_{x_2}(x_0) = A_2, \quad \dots, \quad f'_{x_n}(x_0) = A_n.$$

ekanligi ko'rsatiladi [1].

1-natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\Delta f(x_0) = f'_{x_1}(x_0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(x_0) \Delta x_n + \alpha(\rho)$$

bo'ladi [2].

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada barcha xususiy hosilalari $f'_{x_1}(x_0), f'_{x_2}(x_0), \dots, f'_{x_n}(x_0)$, larning mavjud bo'lishidan funksiyaning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi doim ham kelib chiqavermaydi [3].

Misol:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{7x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{agar } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

funksiyaning (0,0) nuqtada differensiallanuvchi emasligi ko'rsatilsin.

Yechish: Bu funksiya (0,0) nuqtada xususiy hosilalarga ega:

$$f'_{x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$f'_{x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0,0)}{\Delta x_2} = 0.$$

Berilgan funksiyaning (0,0) nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f(0,0) = \frac{7\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}$$

bo'lib, uni





$$\Delta f(x_0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

va

$$\Delta f(x_0) = f'_{x_1}(x_0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(x_0) \Delta x_n + \alpha(\rho)$$

ko'rinishlarda ifodalab bo'lmaydi. Buni isbotlash maqsadida, teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f(x_1, x_2)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\Delta f(0,0) = f'_{x_1}(0,0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(0,0) \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2$$

bo'lib, bu munosabatda $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$ da $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ bo'lishi lozim. Demak,

$$\frac{7 \Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}} = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2.$$

Ma'lumki, Δx_1 va Δx_2 lar ixtiyoriy orttirmalar. Jumladan $\Delta x_1 = \Delta x_2$ bo'lganda yuqoridagi tenglik ushbu

$$\frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}} = \Delta x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)$$

ko'rinishga kelib, undan esa

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$ da α_1 va α_2 miqdorlarning nolga intilmasligini topamiz. Bu esa $f(x_1, x_2)$ funksiyaning $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin deb qilingan farazimizga zid [4].

Shunday qilib, funksiyaning biror nuqtasida barcha xususiy hosilalarga ega bo'lishi funksiyaning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy shartidan iborat ekan.

Natijalar va muhokama. Endi ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchi bo'lishining yetarli shartini keltiraylik.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya ochiq $M (M \subset R^n)$ to'plamda berilgan bo'lib, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in M$ bo'lsin.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x^0 nuqtaning biror atrofida barcha o'zgaruvchilari bo'yicha xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu xususiy hosilalar shu x^0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

$x^0 \in M$ nuqtani olib, koordinatalariga mos ravishda shunday $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ orttirmalar beraylikki, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$ nuqta x^0 nuqtaning aytilgan atrofiga tegishli bo'lsin. Keyin funksiya to'la orttirmasi

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

ni quyidagicha yozish mumkin [5]:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) = & [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - \\ & - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)] + [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - \\ & - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)] + \dots + [f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \Delta x_n) - \\ & - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)] \end{aligned}$$

Bu tenglikni o'ng tomonidagi har bir ayirma tegishli bitta argumentning funksiya orttirmasi sifatida qaralishi mumkin. Buning uchub Lagranj teoremasini



tatbiq qilishimiz mumkin, chunki teoremmizda keltirilgan shartlar Lagranj teoremasi shartlarini bajaradi:

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{x}^0) = & f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) \cdot \Delta x_1 + \\ & + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) \cdot \Delta x_2 + \dots + \\ & + f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \theta_n \Delta x_n) \cdot \Delta x_n \end{aligned}$$

bunda $0 < \theta_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Odatda bu funksiya orttirmasining formulasi deyiladi. Shartga ko'ra x^0 nuqtada $f'_{x_2}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$ xususiy hosilalar uzluksiz. Shunga ko'ra

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x^0_1 + \theta_1 \Delta x_1, x^0_2 + \Delta x_2, \dots, x^n_0 + \Delta x_n) &= f'_{x_1}(x^0) + \alpha_1, \\ f'_{x_2}(x^0_1, x^0_2 + \theta_2 \Delta x_2, x^0_3 + \Delta x_3, \dots, x^n_0 + \Delta x_n) &= f'_{x_2}(x^0) + \alpha_2, \\ &\vdots \\ f'_{x_n}(x^0_1, x^0_2, \dots, x^{0}_{n-1}, x^n_0 + \theta_n \Delta x_n) \cdot \Delta x_n &= f'_{x_n}(x^0) + \alpha_n \end{aligned}$$

bo'lib, unda $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0$ da $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \alpha_n \rightarrow 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi ikki munosabatdan

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(x^0)\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \cdots + \alpha_n\Delta x_n$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligini bildiradi [6].

Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarda funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchalarini solishtirib quyidaga xulosalarga ega bo‘lamiz:

1) Bir o'zgaruvchili funksiyalarda ham ko'p o'zgaruvchili funksiyalarda ham funksiyaning biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lishidan uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi. Demak bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarda funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi bilan uning uzluksiz bo'lishi orasidagi munosabat bir xil [7].

2) Ma'lumki, bir o'zgaruvchili funksiyalarda funksiyaning biror nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi kelib chiqadi va aksincha funksiyaning biror nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishidan uning shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarda funksiyaning biror nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishidan uning shu nuqtada barcha chekli xususiy hosilalarga ega bo'lishi kelib chiqadi. Biroq funksiyaning biror nuqtada barcha chekli xususiy hosilalarga ega bo'lishidan uning shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi [8].

Xulosa.

Demak, bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarda funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi bilan uning hosilaga (xususiyl hosilaga) ega bo'lishi orasidagi munosabatlar bir xil emas ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Toshmetov O‘., Turgunbayev R.M., Saydamatov E.M., Madirimov M. Matematik analiz, I qism. Toshkent. “Extremum-Press”, 2015-yil.
2. Azlarov T.A., Mansurov X.T. Matematik analiz, I qism. T. “O‘qituvchi”, 1995.



3. Axlimirzayev A., Qo'chqarov M.O', Zulfixarov I.M., Ibragimov M.M. Oliy matematika: Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma. Andijon: 2017.
4. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. T. "Fan", 1994.
5. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz asoslari, II qism. T. "Universitet", 2007.
6. Turgunbayev R.M. Matematik analiz, Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi. T. 2006.
7. Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., Vorisov A., G'ulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami, I qism. T. "O'zbekiston", 1993.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ, 1, 2 т. М. «Проспект», 2007

