



KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA KARRALI VA TAKRORIY LIMITLARINING O'ZARO BOG'LIQLIGI

p.f.f.d. (PhD) I.E.Tursunov

Toshkent gumanitar fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekiston

E-mail: i.tursunov1506@mail.ru

[ORCID-0009-0067-2448-9672](https://orcid.org/0009-0067-2448-9672)

Annotatsiya: Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning karrali va takroriy limitlari orasidagi o'zaro munosabatlar chuqur tahlil qilingan. Ishda karrali limit mavjud bo'lganda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymatlari bilan bog'liq teoremlar va ushbu teoremlardan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan hamda qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab berilgan. Shuningdek, takroriy limitlar mavjud bo'lib, karrali limit mavjud bo'lmagan holatlar hamda aksincha vaziyatlar misollar yordamida ko'rsatib berilgan. Keltirilgan misollar orqali ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlarini hisoblashda karrali va takroriy limit tushunchalarining bir-biriga bog'liq emasligi yoki muayyan shartlar ostida tenglashishi yoritilgan.

Kalit so'zlar: ko'p o'zgaruvchili funksiya, karrali limit, takroriy limit, limitning mavjudligi, ketma-ketliklar usuli, matematik analiz, limitlar nazariyasi, funksiyalar limitlari, oliy matematika.

Аннотация: В данной статье проведён углублённый анализ взаимосвязи между кратными и повторными пределами функций многих переменных. В работе приведены теоремы, связанные с существованием повторных пределов при наличии кратного предела, а также результаты, вытекающие из этих теорем, которые обоснованы строгими математическими доказательствами. Кроме того, с помощью примеров показаны случаи, когда повторные пределы существуют, тогда как кратный предел не существует, и наоборот. На основе приведённых примеров раскрывается, что при вычислении пределов функций многих переменных понятия кратного и повторного пределов могут быть как независимыми друг от друга, так и совпадать при выполнении определённых условий.

Ключевые слова: функция многих переменных, кратный предел, повторный предел, существование предела, метод последовательностей, математический анализ, теория пределов, пределы функций, высшая математика.

Annotation: This article provides an in-depth analysis of the relationship between multiple and iterated limits of multivariable functions. The paper presents theorems concerning the existence of iterated limits under the condition that a multiple limit exists, along with results derived from these theorems, which are justified through rigorous mathematical proofs. In addition, examples are given to illustrate cases in which iterated limits exist while the corresponding multiple limit does not, as well as the converse situations. The presented examples demonstrate that, in the process of computing limits of multivariable functions, the concepts of





multiple and iterated limits may be independent of each other or may coincide under certain conditions.

Keywords: multivariable function, multiple limit, iterated limit, existence of limits, sequence method, mathematical analysis, limit theory, limits of functions, higher mathematics.

Kirish

Matematik analiz fanida ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi muhim bo'limlardan biri bo'lib, unda funksiyaning limitlari, uzluksizligi va differensiallanuvchanligi kabi tushunchalar asosiy o'rin tutadi. Ayniqsa, ikki va undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalarning limitlarini o'rganish nazariy va amaliy jihatdan murakkab masalalardan hisoblanadi. Bunday funksiyalar uchun limit tushunchasi bir nechta yondashuvlar orqali aniqlanadi, jumladan, karrali limit va takroriy limit tushunchalari keng qo'llaniladi [1].

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlari masalasida asosiy muammolardan biri karrali va takroriy limitlar orasidagi o'zaro bog'liqlikni aniqlashdan iboratdir. Ma'lumki, ayrim hollarda takroriy limitlar mavjud bo'lsa-da, karrali limit mavjud bo'lmasligi mumkin yoki aksincha, karrali limit mavjud bo'lib, takroriy limitlar mavjud bo'lmasligi holatlari uchraydi. Shu sababli bu ikki tushunchaning o'zaro munosabatlarini aniq shartlar asosida tahlil qilish matematik analiz nazariyasini chuqurlashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Materiallar va usullar

Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun karrali va takroriy limitlarning mavjudligi, ularning tengligi hamda bir-biridan farq qiladigan holatlari batafsil o'rganiladi. Ishda karrali limit mavjud bo'lgan sharoitda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymati bilan bog'liq teoremlar keltirilib, qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab beriladi. Shuningdek, misollar yordamida karrali va takroriy limitlar o'rtasida bog'liqlik mavjud bo'lmagan holatlar ham ko'rsatib beriladi.

Natijalar va muhokama.

1-teorema. Agar

1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning (karrali) limiti:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

mavjud;

2) har bir tayinlangan x_1 da quyidagi

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

takroriy limit ham mavjud bo'lib,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'ladi [2].

Isboti: $f(x_1, x_2)$ funksiya $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da karrali





$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

limitga ega bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, ushbu

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

to'plamning barcha (x_1, x_2) nuqtalari uchun

$$|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi teoremaning 2) shartini inobatga olib, x_1 o'zgaruvchining $|x_1 - x_1^0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatini tayinlab, $x_2 \rightarrow x_2^0$ da $|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$ tengsizlikda limitga o'tib

$$|\varphi(x_1) - d| \leq \varepsilon$$

ni topamiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ bo'lganda

$$|\varphi(x_1) - d| \leq \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \varphi(x_1) = d$$

bo'lishini bildiradi. Keyingi munosabatdan

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'lishi kelib chiqadi. ■

2-teorema. Agar

1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning karrali limiti:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

mavjud;

2) har bir tayinlangan x_2 da quyidagi

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_2)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

takroriy limit ham mavjud bo'lib,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'ladi [8].

Isboti: $f(x_1, x_2)$ funksiya $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da karrali

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

limitga ega bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, ushbu

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

to'plamning barcha (x_1, x_2) nuqtalari uchun

$$|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$$

bo'ladi.





Endi teoremaning 2) shartini inobatga olib, x_2 o'zgaruvchining $|x_2 - x_2^0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatini tayinlab, $x_1 \rightarrow x_1^0$ da $|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$ tengsizlikda limitga o'tib

$$|\varphi(x_2) - d| \leq \varepsilon$$

ni topamiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x_2 - x_2^0| < \delta$ bo'lganda

$$|\varphi(x_2) - d| \leq \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \varphi(x_1) = d$$

bo'lishini bildiradi. Keyingi munosabatdan

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'lishi kelib chiqadi. ■

Ushbu yuqoridagi ikkita teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija: Agar bir vaqtning o'zida 1 va 2-teoremlarning shartlari bajarilsa, u holda

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

bo'ladi [7].

1-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning (0,0) nuqtadagi karrali va takroriy limitlarini hisoblang.

Yechish: Avvalo karrali limitni topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{2\sin^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \\ &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot x_1^2 x_2^2}{\sin^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}{\sin \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \right]^2 \cdot \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \\ &= 2 \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}{\sin \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \right] \cdot \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

So'ngra $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0.$$

Demak,

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = 0.$$

Endi





$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning takroriy limitlarini hisoblaymiz.

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{0}{1 - \cos x_1^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{0}{1 - \cos x_2^2} = 0.$$

Demak,

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning takroriy limitlari (0,0) ga teng ekan. Ya'ni karrali va takroriy limitlar bir-biriga teng ekan [3].

2-misol. Quyidagi

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning (1,0) nuqtadagi karrali va takroriy limitlarini hisoblang.

Yechish: Eng avvalo karrali limitni topamiz:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \ln 2.$$

Demak,

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \ln 2.$$

Endi

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning takroriy limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 1} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\ln(x_1 + 1)}{x_1} = \ln 2,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{x_2})}{\sqrt{1 + x_2^2}} = \ln 2.$$

$$\ln t = 0 \Rightarrow 1.$$

Demak,

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning takroriy limitlari (ln2, ln2) ga teng ekan. Ya'ni karrali va takroriy limitlar bir-biriga teng ekan [4].

Ba'zi bir ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limitini topayotgan vaqtda karrali limit mavjud, ammo takroriy limitlar mavjud bo'lmaydi yoki aksincha takroriy limitlar mavjud bo'ladi, karrali limitlar esa yo'q. Bunda karrali limitni topishni takroriy limitni topishga aloqasi bo'lmaydi yoki aksincha [5]. Shuning





uchun, biz quyida karrali va takroriy limitlarning bog'liq emasligiga doir bir nechta misollar ko'rib chiqamiz:

3-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

funksiyaning (0,0) nuqtada karrali va takroriy limitlari mavjudmi?

Yechish: Takroriy limitlarni topishni qaraylik:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0.$$

Demak, berilgan funksiyaning takroriy limitlari 0 ga teng ekan. Ravshanki,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2).$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bu funksiyaning (0; 0) nuqtadagi karrali limiti mavjud emas. Haqiqatdan ham, (0; 0) nuqtaga intiluvchi

$$(x_{1n}, x_{2n}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$$

$$(x'_{1n}, x'_{2n}) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$$

ketma-ketliklar mos ravishda

$$f(x_{1n}, x_{2n}) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2} = 1,$$

$$f(x'_{1n}, x'_{2n}) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4n^2 + 1}$$

bo'lib,

$$\lim f(x_{1n}, x_{2n}) = 1,$$

$$\lim f(x'_{1n}, x'_{2n}) = 0$$

bo'ladi [6]. Bu esa berilgan funksiyaning karrali limitining mavjud emasligini ko'rsatadi.

Xulosa

Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun karrali va takroriy limit tushunchalari, ularning mavjudligi hamda o'zaro bog'liqlik masalalari batafsil tahlil qilindi. Tadqiqot davomida karrali limit mavjud bo'lgan sharoitda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymati karrali limitga teng bo'lishi bilan bog'liq teoremlar keltirildi hamda qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab berildi. Shuningdek, maqolada karrali va takroriy limitlar o'rtasida bevosita bog'liqlik mavjud bo'lmagan holatlar ham aniq misollar yordamida ko'rsatildi. Xususan, ayrim funksiyalar uchun takroriy limitlar mavjud bo'lsa-da, karrali limitning mavjud emasligi yoki aksincha holatlar yuz berishi mumkinligi yoritildi. Bu holatlar ko'p





o'zgaruvchili funksiyalar limitlarini hisoblashda faqat takroriy limitlarga tayangan holda umumiy xulosa chiqarish har doim ham to'g'ri bo'lmashligini ko'rsatadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Zorich V.A. Matematik analiz. I jild. – Moskva: "Fizmatlit", 2019.
2. Zorich V.A. Matematik analiz. II jild. – Moskva: "Fizmatlit", 2018.
3. Demidovich B.P. Matematik analizdan masalalar va mashqlar to'plami. – Moskva: "Nauka", 2016.
4. Fikhtengolts G.M. Differensial va integral hisob asoslari. II jild. – Moskva: "Nauka", 2015.
5. Kudryavtsev L.D. Matematik analiz kursi. – Moskva: "Vysshaya shkola", 2014.
6. Apostol T.M. Calculus. Vol. II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra. – New York: "Wiley", 2009.
7. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. – New York: "McGraw-Hill", 1976.
8. Stewart J. Calculus: Multivariable. – Boston: "Cengage Learning", 2016.
9. Malik A., Arora S. Mathematical Analysis. – New Delhi: "Wiley India", 2014.
10. Ismoilov E., Barakayeva M. Matematik analiz fanidan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. – Toshkent: "O'qituvchi", 2020.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementlar funksional analiz nazariyasi. – Moskva: "Nauka", 2017.
12. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. – New York: "Wiley", 2011.

